A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO A PARTIR DE UM PROBLEMA GERADOR

Bárbara Lopes Macedo (Faculdades Integradas FAFIBE)
Carina Alexandra Rondini Marretto (Faculdades Integradas FAFIBE)
Jucélia Maria de Almeida Stamato (Faculdades Integradas FAFIBE)
Viviane Aparecida Zacheu Viana (Faculdades Integradas FAFIBE)

Resumo: Este artigo aborda o processo ensino-aprendizagem de logaritmo a partir de um problema gerador. Dessa forma, o problema é visto como um elemento que dá início ao processo de construção do conhecimento, colaborando para a formação dos conceitos antes de sua apresentação em linguagem matemática formal.

Palavras-chave: Problema gerador; logaritmo; processo ensino-aprendizagem.

1. Introdução

Imaginemos o contexto: depois de despertar o interesse dos alunos com uma situação problema, o professor por meio de perguntas bem encaminhadas, os leva a formular hipóteses, reconhecer padrões e estabelecer conjecturas. A situação descrita mostra o aluno participando da construção do seu conhecimento. A vivência desse processo faz com que o aluno desenvolva a autoconfiança, exercite a inteligência e a criatividade, tornando-se independente e motivado a novas descobertas. Além disso, os conhecimentos envolvidos neste contexto são incorporados pelo aluno e, desta forma, dificilmente serão esquecidos.

A partir do momento em que os alunos são preparados para enfrentar o novo, o inusitado, eles desenvolvem a criatividade. Esse desenvolvimento depende da quantidade e da variedade de conhecimentos adquiridos, bem como das impressões vivenciadas. Quando o aluno trabalha em grupo, por exemplo, ele pode assumir dois papéis: o de aprendiz e o de professor. Estes papéis são assumidos alternadamente durante a resolução de um problema, ocorrendo uma socialização entre os elementos do grupo, que desenvolvem o respeito pela opinião dos demais e aprendem a trabalhar de forma colaborativa. Quando o aluno expressa o seu próprio pensamento para outras pessoas ele tem de organizá-lo, aumentando o grau de precisão na verbalização e na compreensão da tarefa para se fazer entender. Durante a explanação o aluno percebe se a sua conclusão tem sentido, se sua explicação ou resposta é sensata.

Para estimular o desenvolvimento da inteligência do aluno, devemos ficar atentos para as situações descritas por (POLYA, 1995):

- Adivinhar é mais fácil do que demonstrar;
- Resolver problemas concretos é mais natural do que construir estruturas conceituais;
- O concreto vem antes do abstrato;
- A ação e a percepção antes das palavras e dos conceitos;
- Os conceitos antes dos símbolos.

Conduzir o aluno à descoberta exige um bom conhecimento tanto do problema quanto do aluno; além disso, deve-se procurar adquirir experiência e familiaridade com as etapas que se apresentam com freqüência na resolução de problemas.

Este artigo propõe a resolução de um problema como desencadeador da construção do conceito de logaritmo observando-se as etapas sugeridas anteriormente.

Apresentam-se em seguida discussões ocorridas sobre resolução de problemas, pois seus conhecimentos permitem melhor compreensão do tema.

2. A Resolução de Problemas como Metodologia para o Ensino da Matemática

Uma revisão bibliográfica (segundo (BICUDO, 1999)) sobre resolução de problemas mostra que este assunto vem chamando a atenção dos educadores matemáticos desde o século XIX. No entanto, a preocupação com a resolução de problemas pode ser notada em registros históricos das civilizações egípcia, chinesa e grega desde a antiguidade.

Dewey, entre 1896 e 1904, defendia o ensino por meio do estudo e resolução de problemas de interesse das comunidades. Deste modo, para ele, podia-se desenvolver o senso crítico do aluno capacitando-o a colaborar para o desenvolvimento de uma sociedade democrática. No entanto, a primeira vez em que a resolução de problemas é tratada como um tema de interesse para professores e alunos, nos níveis superiores, foi a partir do livro *How to solve it*, de Polya, de 1945.

Nos Estados Unidos, na década de 1950, a ênfase das pesquisas sobre resolução de problemas era sobre o produto das soluções, não valorizando os processos da resolução. No Brasil, em 1964, o Prof. Luis Alberto S. Brasil, defendia o ensino de Matemática a partir de um problema gerador de novos conceitos e conteúdos. Em nível mundial, as investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares têm início na década de 1970. É o período em que a preocupação deixa de ser a busca da solução correta para o problema e passa a centrar-se no processo envolvido para a obtenção da resposta e nas estratégias utilizadas.

Schroeder & Lester destacam três maneiras distintas de abordar resolução de problemas:

- Ensinar sobre resolução de problemas;
- Ensinar a resolver problemas;
- Ensinar Matemática através da resolução de problemas.

De acordo com Onuchic (ONUCHIC, 1999 apud BICUDO, 1999), “o problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal”.

Tomando-se como base esse referencial teórico, este trabalho, apresenta uma proposta da utilização de resolução de problemas como metodologia para o ensino de logaritmo. A justificativa da escolha do tema e da metodologia utilizada é descrita em detalhes a seguir.

3. A Relevância do Tema

A escolha do tema *logaritmo* deve-se a sua importância na aplicação da Matemática nas mais diversas ciências. Pesquisas revelam que a forma tradicional de ensino (definição, demonstração de propriedades, exemplos e exercícios de aplicação) não desperta interesse nos alunos pelo assunto.

Historicamente, desde a época de sua criação até o surgimento das calculadoras e computadores, os logaritmos foram uma poderosa ferramenta de cálculo e decisivos para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia. O astrônomo Kepler, por exemplo, empregou largamente os logaritmos e isso o levou a descobrir a *3ª lei planetária* (os quadrados dos tempos das revoluções siderais dos planetas são proporcionais aos cubos dos grandes eixos de suas órbitas).

Apesar das calculadoras e computadores terem tornado os logaritmos obsoletos para cálculos, seu estudo é de grande relevância, uma vez que estão relacionados a leis matemáticas que descrevem alguns fenômenos naturais. A função exponencial e sua inversa, a função logarítmica, por exemplo, descrevem grandezas cuja taxa de variação a cada momento, é proporcional ao seu valor naquele momento. Pode-se citar como aplicações:

- Um capital empregado a juros compostos;
- Uma população de seres vivos;
- A radioatividade de uma substância.

Tais situações, em que o uso de logaritmo é natural, devem ser apresentadas aos alunos, a fim de familiarizá-los com o seu uso.

4. O Problema Gerador

Quando trabalhamos com equações exponenciais, tudo parece bastante simples até que sejam formuladas certas perguntas incômodas como, por exemplo, *qual é o valor de x em* $10^x = 2$*?* Em outras palavras, *como resolver uma equação exponencial quando não é possível igualar as bases?* Esta questão costuma ser feita pelos alunos após a resolução de diversos tipos de equações exponenciais e apresenta-se como uma boa oportunidade para introduzir o tema proposto, o que a torna uma situação-problema geradora da construção do conceito de logaritmo.

A partir do momento em que o aluno faz essa pergunta, o professor pode questioná-lo sobre os possíveis valores de x, levando-o a fazer conjecturas do tipo: "*Se x = 0 então* $10^0 = 1$, *mas, se x = 1 então* $10^1 = 10 > 2$ *"*. Assim, o aluno deverá perceber que na igualdade $10^x = 2$ deve-se ter x entre 0 e 1, e ainda, que x está mais próximo de 0 do que de 1.

Deste modo, pode-se fazer uso do *método das potências aproximadas* (1) que, se não corresponde fielmente ao desenvolvimento histórico do conceito, tem o mérito de ser bastante acessível tornando-se uma alternativa de se explicar a construção das tabelas de logaritmos. (o símbolo ~ significa aproximadamente)

$$10^x = 2 \Rightarrow 10^3 \sim 2^{10} \Rightarrow 10^{0,3} \sim 2 \Rightarrow x = 0,3$$

$$10^x = 3 \Rightarrow 3^9 \sim 20000 \Rightarrow 3^9 \sim 2.10^4 \Rightarrow 3^9 \sim 10^{0,30}.10^4$$

$$3^9 \sim 10^{4,30} \Rightarrow 3 \sim 10^{0,477} \Leftrightarrow x = 0,477 \qquad (1)$$

$$10^x = 4 \Rightarrow 10^x = 2^2 \Rightarrow 10^x = \left(10^{0,30}\right)^2 \Rightarrow 10^x = 10^{0,60} \Leftrightarrow x = 0,60$$

Assim, se $10^x = 4$, ao expoente x ao qual se deve elevar a base 10 para encontrar-se, por exemplo 4 é denominado o logaritmo de 4 na base 10 cuja notação é:

$\log_{10} 4 = x$, sendo que 4 é o logaritmando, 10 é a base e x o logaritmo. De maneira geral, tem-se:

O expoente x ao qual deve-se elevar a base a para encontrarmos o número b, é chamado de logaritmo de b na base a (sendo que a e b são números reais, com $0<a\neq 1$ e $b>0$) e usa-se a seguinte notação:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, \text{ para } 0 < a \neq 1 \text{ e } b > 0$$

Com este desenvolvimento, pode-se notar que são utilizadas as propriedades dos logaritmos mesmo antes de formalizadas: a multiplicação é substituída pela adição; a potenciação pela multiplicação:

- $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a b^n = n.\log_a b$

Após a formalização dos conceitos e das propriedades, o objetivo é introduzir o conceito de logaritmo neperiano ($\log_e x$). O número e aparece de modo natural em situações como juros compostos e crescimento populacional. Pode-se introduzir o assunto a partir de um problema de juros compostos como o seguinte:

Suponha uma unidade monetária depositada em uma conta com taxa anual de juros de 100%. Qual é o montante ao final de um ano se os juros forem capitalizados: anualmente, semestralmente, trimestralmente, mensalmente, diariamente, mil vezes ao ano, dez mil vezes ao ano, continuamente?

a) Anualmente: $M = 1.(1+1) \Rightarrow M = 2$
b) Semestralmente: $M = 1.\left(1+ \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow M = 2,25$
c) Trimestralmente: $M = 1.\left(1+ \frac{1}{4}\right)^4 \Rightarrow M = 2,44$
d) Mensalmente: $M = 1.\left(1+ \frac{1}{12}\right)^{12} \Rightarrow M = 2,61$
e) Diariamente: $M = 1.\left(1+ \frac{1}{365}\right)^{365} \Rightarrow M = 2,71$
f) 1 000 vezes ao ano: $M = 1.\left(1+ \frac{1}{1000}\right)^{1000} \Rightarrow M = 2,7169$
g) 10 000 vezes ao ano: $M = 1.\left(1+ \frac{1}{10000}\right)^{10000} \Rightarrow M = 2,7182$
h) Continuamente: $n \to \infty \Rightarrow M = 1.e \Rightarrow M = 2,718281...$

Genericamente, se p unidades monetárias são investidas a uma taxa anual r de juros compostos, capitalizados k vezes ao ano, durante t anos, teremos o saldo M:

$$M = p.\left(1+\frac{r}{k}\right)^{k.t} \qquad (2)$$

No ensino superior, o professor poderá utilizar o conceito de limites para demonstrar, em termos matemáticos, o que ocorre com a expressão (2) quando k tende ao infinito. Assim, se

$$\frac{k}{r} = n \Rightarrow k = r.n \Rightarrow p\left(1+\frac{r}{rn}\right)^{r.n.t} = p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{r.t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \lim_{k\to\infty} p\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k.t} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{r.t} \Rightarrow M = p.e^{r.t}$$

5. Alguns Resultados

Esta proposta tem sido trabalhada com alunos de ensino médio e de cursos de graduação em diferentes áreas, como Administração, Licenciatura em Matemática e Ciências Contábeis, e tem-se obtido bons resultados.

É relevante destacar um fato ocorrido durante uma aula de Matemática Básica para o primeiro ano do curso de Administração: após a construção de alguns logaritmos por meio das *aproximações sucessivas*, foi colocado para a classe o seguinte problema:

Durante quantos meses deverá ser aplicado um capital, à taxa de 10% ao mês, para que ele triplique?

Os alunos da classe em questão dispunham apenas de calculadoras simples, com as quatro operações, raiz quadrada e memória. Uma das alunas apresentou a seguinte solução para o problema em questão:

$$(1{,}1)^x = 3 \qquad (3)$$

e determinou o $\log 11$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} &11^5 = 161051 \Rightarrow 11^5 \sim 160000 \Rightarrow 11^5 \sim 2^4.10^4 \Rightarrow 11^5 \sim \left(10^{0,30}\right)^4.10^4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 11^5 \sim 10^{1,20+4} \Rightarrow 11^5 \sim 10^{5,20} \Rightarrow 11 \sim 10^{1,04} \end{aligned} \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (3), obtém-se:

$$\left(\frac{11}{10}\right)^x \sim 10^{0,47} \Rightarrow \left(\frac{10^{1,04}}{10}\right)^x \sim 10^{0,47} \Rightarrow 10^{0,04x} \sim 10^{0,47} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}04x \sim 0{,}47 \Rightarrow \quad x \sim 11{,}75$$

Logo, conclui-se que serão necessários 11 meses e 75% do mês, o que equivale a 20 dias, aproximadamente.

Fica evidente que a aluna de fato compreendeu o conceito de logaritmo e viu neste problema a possibilidade de utilizá-lo. Quando questionada sobre sua resolução disse saber que o resultado não seria um número natural e, por ter usado uma aproximação por falta (161 051 ~160 000) o valor encontrado para x seria maior do que o verdadeiro.

6. Considerações Finais

A utilização de um problema gerador no processo ensino / aprendizagem de matemática, apesar de ser discutida há décadas por educadores matemáticos, ainda não se tornou prática rotineira para a maioria dos docentes. Como dito anteriormente, sua prática exige um bom conhecimento tanto do problema quanto das dificuldades básicas dos alunos; além disso, deve-se adquirir familiaridade com as etapas que se apresentam com freqüência na resolução de problemas e ter clareza dos objetivos a serem alcançados. Esta postura é imprescindível ao professor para facilitar a aprendizagem pois, para os alunos, trata-se de uma metodologia diferente das habituais (teorias e exercícios de fixação).

Assim, percebe-se que a partir da motivação do aluno para a resolução do problema proposto, o processo ensino / aprendizagem se revela bastante eficaz, uma vez que, o aluno motivado a resolver um problema adota uma postura semelhante a de um pesquisador, tornando-se mais independente na construção de seu conhecimento.

Espera-se que este trabalho seja um estímulo aos professores para iniciarem esta prática desde as séries iniciais, evitando, assim, a acomodação dos alunos em receberem tudo pronto e acabado e, contribuindo para o desenvolvimento da autonomia no processo de aprendizagem.

7. Referências Bibliograficas

ÁVILA, Geraldo. **Números muito grandes**. In Revista do Professor de Matemática, SBM.1994. v. 25

BICUDO, Maria Aparecida Vigiani. **Pesquisa em educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999.

BOYER, Carl Benjamin**. História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

DANTE, Luiz Roberto**. A didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 2000.

DAVIS, Philip J. & HERSH, Reuben. **A experiência Matemática**. Rio de Janeiro: F. Alves, 1985.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FRAENKEL, Renato. **Logaritmos: um curso alternativo**. In. Revista do Professor de Matemática, SBM. v. 4

LIMA, Elon Lages. **Conceitos e controvérsias**. In. Revista do Professor de Matemática, SBM. v. 3

______, **Sobre a evolução de algumas idéias matemáticas**. In. Revista do Professor de Matemática, SBM.1985. v. 6

______, **Sistemas de logarritmos**. In. Revista do Professor de Matemática, SBM. 1991.v. 18

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.