FRACTAIS: PADRÕES COMPLEXOS DE INCRÍVEL BELEZA

(Fractals: Complex patterns of incredible beauty)

GRACIELE PEREIRA DA CRUZ
Universidade Nove de Julho, São Paulo, SP
graci_ju@yahoo.com.br

Abstract:

This work is an educational proposal that uses fractals as the mainly motivational tool. Interesting features of non Euclidian and fractal geometries are describes and some examples of the most commons fractals are explored. At the fourth section we write a short biography of Benoit Mandelbrot and at the end of the paper we mentioned some of the applications of the fractals on different fields of knowledge.

Keywords: Non-Euclidian geometry; Fractal geometry;, Benoit Mandelbrot

Resumo.

Este trabalho consiste numa apresentação sucinta de uma proposta de ensino abordando como meio motivador os fractais. Aspectos da geometria não-euclidiana bem como de geometria fractal são descritos, assim como alguns exemplos dos fractais mais conhecidos. Uma breve biografia de Benoit Mandelbrot é descrita, e ao final do trabalho mencionamos algumas das utilidades dos fractais nas diversas áreas do conhecimento.

Palavras-chave: Geometria não-euclidian; Geometria Fractal; Benoit Mandelbrot

1. Introdução

Atualmente muitas áreas do conhecimento vêm passando por transformações, dentre elas a matemática. Desta forma futuros professores de matemática devem pesquisar a diversidade de avanços que esta área apresenta, para que os educandos tenham acesso a esses conhecimentos, tendo maior prazer, motivação e interesse pela disciplina. Para que isso ocorra é importante que o professor apresente os conteúdos de forma inovadora, fazendo com que haja ligação com o cotidiano do aluno e que o encante de alguma forma. Para tal buscamos abordar alguns conteúdos de matemática utilizando como meio motivador os fractais.

2. Geometria não-euclidiana

A geometria como outros ramos da Matemática tem seu surgimento desde os tempos mais remotos. Podemos estabelecer que a geometria tem seu ponto inicial na Grécia por volta de 300 a.C., quando Euclides escreveu "Os elementos"e nessa época a geometria euclidiana estava totalmente desenvolvida.

Contudo, começaram a ocorrer vários questionamentos sobre a geometria euclidiana, fazendo com que vários matemáticos voltassem a estudar o assunto. Isso gera um grande acontecimento na história da matemática, a descoberta da geometria não-euclidiana, que ocorreu por volta da primeira metade do século XIX, por parte de vários matemáticos que tentaram uma prova para o Quinto Postulado de Euclides:

Quinto Postulado *– É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então as duas* *retas, se continuados, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.*

Por volta de 1820 já se conheciam os primeiros teoremas da geometria não-euclidiana, nome dado por *Gauss (1777-1855)*. Desde o início dos anos de 1800, Gauss começou a se interessar pela questão da possível existência de geometrias não-euclidianas. No entanto ele sabia que a existência de uma geometria não-euclidiana criaria uma perturbação imensa na matemática e que os que apoiassem essa descoberta publicamente, iriam sofrer uma reação extremamente dura. Foi por isso que Gauss preferiu manter seu status social e não divulgou os resultados de sua pesquisa, porém manteve contato com vários matemáticos de sua época.

Por mais de 2000 anos geômetras ocuparam-se em demonstrar o postulado das paralelas como um teorema a partir dos nove axiomas e postulados restantes.

No entanto a descoberta da geometria não-euclidiana deu-se a *Bolyai* e *Lobachevsky*, apesar de Gauss ter sido o primeiro a alcançar tais conclusões.

János Bolyai (1802-1860) em 1832 publicou os resultados de sua pesquisa sobre geometrias não-euclidianas como um apêndice a um trabalho volumoso de seu pai, o matemático Farkas Bolyai. Curiosamente, Bolyai nunca publicou seus trabalhos a não ser esse apêndice, mas deixou mais de 20.000 páginas de manuscritos de trabalhos matemáticos desenvolvidos por ele até sua morte.

Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856) ao se interessar pela geometria não-euclidiana fez com que ele fosse visto na Rússia como uma "pessoa excêntrica". Publicou em russo (1829/30) o primeiro artigo sobre geometria não-euclidiana no Karzain Bulletin, dois ou três anos antes de Bolyai. Na tentativa de provar o Quinto Postulado admitiu que isto seria impossível, surgindo assim uma nova geometria, hoje conhecida como geometria hiperbólica.

3. Aspectos históricos dos fractais

Poderíamos dizer que o começo da história dos fractais foi por volta do ano de 1975, no qual Benoit Mandelbrot criava a palavra fractal, mas uma série de acontecimentos anteriores abriram caminho para que essa iniciativa surgisse.

Entre a segunda metade do século XIX e a primeira do século XX, foram sendo propostos vários objetos matemáticos com características especiais e que foram durante muito tempo considerados "monstros matemáticos", já que desafiaram as noções comuns de infinito [(1)].

Cantor (1845-1918) colocou o problema de uma linha à qual ele retirava o seu terço médio, seguido do terço médio de cada um dos segmentos restantes e assim sucessivamente, gerando o que foi chamada de "poeira de Cantor" que sendo infinita, possuiria medida igual a zero. Em 1904 surge a curva de *von Koch (1870-1924)* que sendo uma linha rodeada por uma área infinita, possuiria um comprimento infinito.

Já em 1918 *Gaston Julia (1893-1978)* e *Pierre Fatou (1878-1929)*, apresentaram um trabalho sobre processos iterativos envolvendo números complexos que mais tarde vieram a ser conhecidos como "Conjuntos de Julia". Outro matemático que teve grande importância foi *Poincaré (1854-1912)* que foi provavelmente o primeiro a compreender e expor a noção de Caos.

No entanto, a partir da segunda metade deste século foi que os acontecimentos começaram a se suceder cada vez mais. Rapidamente *Edward Lorenz (1917-2008)*, um metereologista americano dedicava-se em 1961 com a Judá de um computador, a tarefa de aumentar a confiabilidade das previsões metereológicas. Um dia, tentando repetir uma experiência que havia feito anteriormente, se enganou com os números que deveria introduzir no computador, truncando as casas decimais, o que ocasionou no final uma significativa diferença nos resultados. A este fenômeno deu-se o nome de “Efeito Borboleta”, devido a possibilidade simbólica de o bater de asas de uma borboleta em Pequim, poder provocar um tufão em Nova York.

Pouco tempo depois já na década de 70, James Yorke viria a encontrar nos trabalhos de Lorenz a chave para os problemas sobre os quais se debruçava, dando ao Caos seu nome e juntamente com outros como May ou Hoppensteadt, divulgaria esta nova Ciência que acabara de criar ([1]).

A partir de então surge a figura de Benoit Mandelbrot.

4. Benoit Mandelbrot

Nascido em Varsóvia, polônia em 20 de novembro de 1924 é um matemático francês de origem judaico-polonesa. Criou-se em Paris onde foi aluno da célebre École Polytechnique. Em 1948, foi para os Estados Unidos onde estudou ciência aeroespacial no Instituto de Tecnologia da Califórnia. Desde então dedicou-se aos mais variados ramos do conhecimento como geologia, economia, comunicação, biologia, termodinâmica, metereologia e computação ([2]).

O termo fractal provém da palavra fractus, que significa quebrado, irregular ou descontínuo. Foi essa a palavra escolhida por Mandelbrot para rotular sua descoberta que o levou a publicar o livro “Les Objects Fractales: Forme, Hasard et Dimension”, que reescrito em 1977 teve o nome alterado para “The Fractal Geometry os Nature”.

Os termos fractais não foram descobertos nem criados por Mandelbrot, ele apenas os nomeou, visto que estes já eram conhecidos antes de sua descoberta. Há indícios de que eles existiam antes do século XX e eram conhecidos como “monstros matemáticos” na Grécia Homérica, Índia e china. Mandelbrot se apoiou em estudos de outros matemáticos como Georg Cantor, David Hilbert (1862-1943), Giusepe Peano (1858-1932), von Koch (1870-1924), Waclaw Sierpinski (1882-1969), entre outros para definir os fractais.

5. Geometria Fractal

A geometria fractal surgiu da necessidade de se calcular e descrever certos fenômenos da natureza ou objetos que não possuem forma definida.

Descontinuidade, surtos de ruídos, poeira de Cantor – fenômenos como estes não eram mencionados nas geometrias dos últimos dois mil anos. As formas de geometria clássica são as linhas e os planos, os círculos e as esferas, os triângulos e os cones. Representam uma poderosa abstração da realidade, e inspiraram uma vigorosa filosofia de harmonia platônica. Euclides fez delas uma geometria que durou dois milênios, a única geometria conhecida da maioria das pessoas, até hoje. Os artistas viram nelas uma beleza ideal, os astrônomos ptolomaicos construíram uma teoria do universo com elas ([3]).

Mandelbrot tinha outras idéias. Para ele as nuvens não eram esferas, as montanhas não eram cones, e os relâmpagos não percorrem uma linha reta. Para ele o entendimento da complexidade da natureza não era apenas algo aleatório, não apenas um acaso, mas exigia a convicção de que o interessante na trajetória do raio, por exemplo, não era sua direção, mas sim a distribuição dos seus ziguezagues.

Mandelbrot não tomava as medidas euclidianas básicas tais como extensão, profundidade e espessura para suas teorias, pois dizia que elas não abrangiam a essência das formas irregulares, mas voltou seus trabalhos para a idéia da dimensão. Ele foi além das dimensões 0,1,2,3... até uma impossibilidade aparente: as dimensões fractais.

A dimensão fracionada torna-se uma maneira de medir o grau de aspereza, ou de fragmentação, ou de irregularidade de um objeto. Mandelbrot fez com sua geometria uma afirmação sobre os padrões irregulares que estudara na natureza: que o grau de irregularidade permanece constante em diferentes escalas. O mundo exibe, repetidamente, uma irregularidade regular, o que torna tal afirmação verdadeira.

Estes estudos, sobre os padrões irregulares nos processos naturais e a investigação das formas infinitamente complexas tiveram um ponto em comum, a auto-semelhança.

A auto-semelhança é a simetria através das escalas, isto é recorrência, um padrão dentro de outro. Exemplo dessa forma, é a curva de Koch que exibe auto-semelhança mesmo sob grande ampliação. A auto-semelhança está contida na construção das curvas e é uma característica facilmente identificável.

As percepções da geometria fractal ajudaram cientistas que estudavam a maneira pela qual as coisas se fundiam, a maneira pela qual se separavam ou a maneira pela qual se fragmentavam. Ajudou-os a examinar os materiais, as superfícies microscopicamente irregulares dos metais, os pequenos orifícios e canais de rochas porosas portadoras de petróleo, as paisagens fragmentadas de uma zona de terremotos.

Um dos cientistas que utilizou os trabalhos de Mandelbrot a respeito de geometria fractal foi Christopher Scholtz, professor da Universidade de Colúmbia, que se especializava na forma e estrutura da terra sólida.

Scholtz viu que a geometria fractal proporcionava um vigoroso instrumento para a descrição das irregularidades específicas da superfície da terra. Scholtz tornou-se conhecido em seu campo como uma das poucas pessoas que adotavam técnicas fractais, e ele sabia que alguns dos seus colegas geofísicos encaravam esse pequeno grupo como exce6entricos, mesmo assim Scholtz considerava indispensáveis os instrumentos da geometria fractal.

"*É um modelo único, que nos permite enfrentar a gama das mutáveis dimensões da terra", disse ele. "Proporciona-nos os instrumentos matemáticos e geométricos para descrever e fazer previsões. Uma vez vencida a dificuldade e entendido o paradigma, podemos começar a medir coisas e pensar nela de uma nova maneira. Passamos a vê-las de maneira diferente. Temos uma nova visão, não é igual à visão antiga, absolutamente – é muito mais ampla"([3]).*

É difícil romper o hábito de pensar nas coisas em termos de seu tamanho e de sua direção. A geometria fractal, porém busca para alguns elementos da natureza uma escala característica. Furacão, por definição é uma ventania de certa intensidade. Na realidade, os cientistas atmosféricos estão compreendendo que o tumulto no ar forma um continuum, desde os pés-de-vento que arrastam o lixo nas ruas de uma cidade até os vastos sistemas ciclônicos visíveis d espaço.

Essas estruturas complexas estão presentes em várias coisas, um exemplo é o corpo humano. No aparelho digestivo, o tecido revela ondulações dentro de ondulações, os pulmões tem de concentrar uma maior superfície possível no menor espaço e o sistema circulatório tem de apertar uma enorme área de superfície num volume limitado, se assemelhando a curva de Koch que aperta uma linha de extensão infinita numa pequena área.

Os vasos sanguíneos da aorta dos capilares, formam um outro tipo de *continuum*. Eles se ramificam, se dividem e voltam a ramificar-se até se tornarem muito estreitos. A natureza dessa ramificação é fractal.

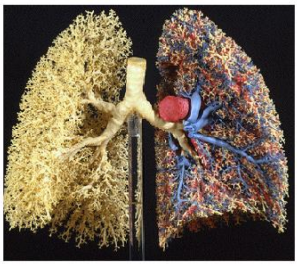

Figura 1: Sistema pulmonar

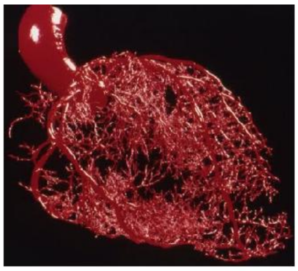

Figura 2: Sistema arterial

Uma década depois que Mandelbrot publicou suas especulações a respeito de fisiologia, alguns biólogos teóricos começaram a verificar padrões fractais nas estruturas do corpo. O sistema coletar urinário revelou-se fractal, a rede de fibras especiais do coração, que transmitem os pulsos de corrente elétrica aos músculos que se contraem, o canal biliar do fígado, todas essas estruturas além de outras, possuem certas descrições fractais e aí nos perguntamos, como a natureza conseguiu produzir essa arquitetura tão complicada.

Mandelbrot por sua vez diz que as complicações só existem no contexto da geometria euclidiana tradicional. Como fractais, as estruturas ramificantes podem ser descritas com transparente simplicidade, com apenas algumas informações. Mandelbrot passava naturalmente das árvores pulmonares e vasculares para árvores botânicas reais, árvores que precisavam captar o sol e resistir ao vento, com ramos fractais e folhas fractais. E os biólogos teóricos começaram a especular que a escala fractal não era apenas comum, mas universal, morfogênese.

Tendo consolidado suas idéias em um livro sobre a natureza e a história da matemática, Mandelbrot conheceu uma margem de sucesso acad6emico que não estava habituado, tornando-se uma peça importante do circuito das conferências científicas.

Para os matemáticos puros, Mandelbrot continuava um marginal, polemizado, porém ele encontrou uma aceitação mais entusiástica entre os cientistas aplicados que trabalhavam com petróleo, rochas ou metais, em especial nos centros de pesquisas de grandes empresas.

6. Exemplos de Fractais

Os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem indefinidamente, mesmos limitados a uma área finita.

Definição 1. *Um dado conjunto E é fractal se, em E, D>D, sendo D a dimensão fractal e D_t a dimensão topológica do conjunto E. A dimensão topológica é a dimensão de Euclides e a dimensão fractal de um objeto, mede o seu grau de irregularidade, a estrutura e comportamento.*

Em ([4]), uma definição menos rigorosa é proposta, em termos das características das construções ou conjuntos denominados fractais. Uma dada construção é considerada fractal se possui todas, ou a maioria das seguintes propriedades:

- Estrutura fina em qualquer escala.

A estrutura fina consiste no detalhamento infinito, sucessivas ampliações de um fractal levam a mais e mais detalhes.

- Não pode ser descrito de maneira simples por uma função analítica ou em linguagem geométrica tradicional.

Isso se deve ao fato de que os fractais são construídos através de processos iterativos. É impossível representá-los por uma função simples ([5]).

- Possui alguma espécie de auto-similaridade

A auto-similaridade consiste em obter réplicas menores da figura através de sua divisão (ou no caso de fractais sua ampliação).

- Sua dimensão fractal é estritamente maior que a sua dimensão topológica.
- Em muitos casos tem uma lei de formação simples.

Para o fractal essa lei de formação é o processo que é repetido a cada iteração.

Como descrito em ([6]) os fractais podem ser classificados em três categorias principais, que dependem do modo como o fractal é formado ou gerado. São elas:

6.1. Sistemas de funções iteradas.

Os fractais determinísticos também conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo. Abaixo são dados alguns exemplos desses fractais.

Conjunto de Cantor

O conjunto de Cantor é um subconjunto do intervalo [0,1] definido pelo matemático Georg Cantor como limite de um processo iterativo. A construção de tal conjunto segue os seguintes passos:

1 - No passo 0, considera-se o intervalo [0,1];
2 - No passo 1, retira-se o terço do meio do intervalo [0,1];
3 - No passo 2, retira-se o terço do meio de cada um dos dois intervalos criados pelo passo 1;
4 - No passo n, retira-se o terço do meio de cada um dos intervalos criados pelo passo n-1.

O conjunto de Cantor é o conjunto dos pontos que não são retirados em nenhum passo do processo, vale a pena observar que este conjunto é infinito e não-enumerável.

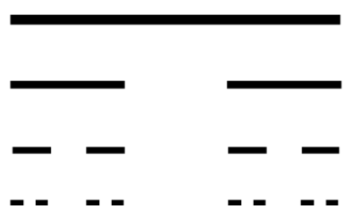

FIGURA 3. Conjunto de Cantor

Curva de Peano

A Curva de Peano, apresentada em 1890, é um exemplo de um fractal que preenche o plano. Uma curva que preenche o plano passa por todos os pontos de uma determinada área, acabando por, gradualmente, a ocupá-la totalmente.

O ponto de partida para a construção de tal curva é começar com um segmento. Na primeira iteração o segmento é substituído por 9 segmentos de comprimento igual a um terço do comprimento do segmento inicial. Esses 9 segmentos constituem a primeira iteração da construção recursiva da curva de Peano. Depois, o processo recursivo aplica-se a cada um dos 9 segmentos, até o infinito.

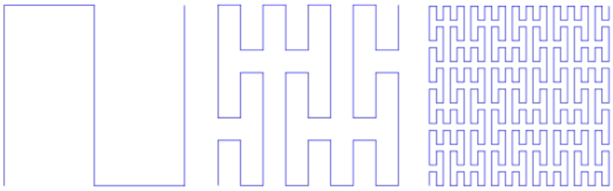

FIGURA 4. Curva de Peano

Características da Curva de Peano

A Curva de Peano no nível 1 possui nove segmentos, como as substituições são efetuadas em cada um desses, pode se encontrar miniaturas da curva no nível 1 em nove partes do nível 2. Deste mesmo modo, pode se encontrar nove miniaturas do nível 2, no nível 3 e assim sucessivamente.

- Estrutura fina
  Ao se ampliar a curva, não se perde a quantidade de detalhes que ela possui.
- Fácil construção
  Um passo repetido indefinidamente.
- Difícil descrição analítica
  Não se consegue descrever esta curva através de simples função analítica.

Curva de Hilbert

A curva de Hilbert é uma curva fractal contínua que preenche o espaço, descoberta pelo matemático alemão David Hilbert em 1891, como um variante das curvas que preenchem o espaço descoberta por Giuseppe Peano em 1890.

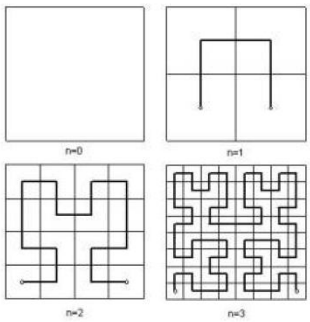

FIGURA 5. Curva de Hilbert

Características da Curva de Hilbert

- Auto-semelhança
  Quatro cópias do fractal, reduzidas pela metade no próprio fractal.
- Estrutura fina
  Ao ampliarmos essa curva, não perdemos a quantidade de detalhes que ela possui.
- Fácil construção
  Apesar da complexidade, é composta por alguns passos repetidos indefinitivamente.
- Difícil descrição matemática

Esta curva possui um traçado que não consegue representar por uma função analítica simples.

Curva de Koch

A Curva de Koch é uma curva geométrica e um dos primeiros fractais a serem descritos. Aparece pela primeira vez num artigo de 1906, intitulado “Une méthode geometrique élémentaire pour l’étudie de certaines questions de La théorie dês courbes planes”, de autoria do matemático sueco *Helge Von Koch*. O conhecido *Floco de Neve de Koch* corresponde à mesma curva, sendo que sua construção se inicia a partir de um triângulo eqüilátero ([7]).

Para construirmos este fractal podemos construí-lo a partir de um segmento de reta submetido a alterações recorrentes, isto é, a iterações, como descritas a seguir:
1 – Divide-se o segmento de reta em três segmentos de igual comprimento.
2 – desenha-se um triângulo eqüilátero, em que o segmento central, referido no primeiro passo, servirá de base.
3 – Apaga-se o segmento que serviu de base ao triângulo do segundo passo.

Procedendo da mesma forma para cada um dos quatro segmentos que ficam, formam-se dezesseis novos segmentos menores. A figura abaixo representa as seis primeiras construções.

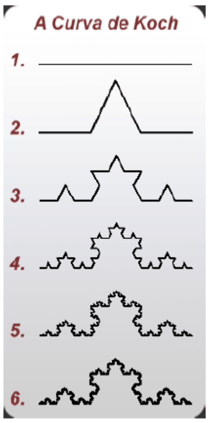

FIGURA 6. Curva de Koch

Características da Curva de Koch

- Auto-semelhança

Em cada nível encontramos 4 cópias da figura no nível anterior, em tamanho reduzido sendo que, para cada uma dessas 4 partes ocorre o mesmo.

- Fácil construção

Processo de obtenção simples, dois passos repetidos indefinitivamente.

- Difícil descrição matemática

Não existe uma função analítica que descreva tal curva.

Triângulo de Sierpinski

Foi primeiramente descrito pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski. O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica fractal obtido através de um processo recursivo. Ele é uma das formas elementares da geometria fractal por apresentar algumas propriedades tais como: ter tantos pontos como o do conjunto dos números reais, ter área igual a zero, ser auto-semelhante (uma sua parte é idêntica ao todo), não perder a sua definição inicial à medida que é ampliado.

Uma das maneiras de se obter um triângulo de Sierpinski é através do seguinte algoritmo:

1 – Para começar o processo partimos de um triângulo eqüilátero.

2 – Em seguida unem-se os pontos médios de cada lado do triângulo, formando 4 triângulos cujos lados estão ligados.

3 – Retira-se agora o triângulo central. A recursão consiste em repetir indefinidamente o procedimento anterior em relação a cada um dos triângulos obtidos.

FIGURA 7. Triângulo de Sierpinski

Características do Triângulo de Sierpinski

Possue todas as características de um fractal, ou seja:

- Auto-semelhança.
- Estrutura fina.
- Simplicidade na lei de formação.
- Processo de construção é repetitivo.
- Não é descrito de modo analiticamente simples.

Acima estão relacionados alguns dos fractais mais conhecidos porém há vários outros exemplos. Abaixo relacionaremos a aplicação de um exemplo destes fractais, em nosso caso o Triângulo de Sierpinski como um meio motivador para o ensino de Progressões Geométricas e de matrizes, aonde utilizaremos o conceito de sistemas de funções iteradas.

Dado um triângulo eqüilátero de lados 1cm, calculamos a altura h desse triângulo e em seguida sua área. Temos assim que sua altura e sua área serão dadas pelas seguintes expressões:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \text{ e } A_t = \frac{b.h}{2} \Rightarrow A_t = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

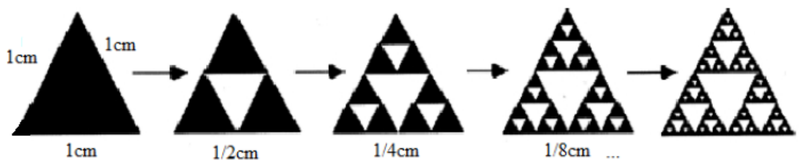

FIGURA 8. Triângulo de Sierpinski

Calculada a área A_t e tomando a figura acima temos que:

$$A_0 = 1.\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$A_1 = 3.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$$A_2 = 9.\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{64}$$

$$A_3 = 27.\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{256}$$

$$\vdots$$

$$A_n = 3^n.\frac{\sqrt{3}}{4^{n+1}}$$

Dessa maneira chegamos a uma progressão geométrica, onde a1 é 1 e sua razão é ½. Nesse exemplo também pode ser trabalhada a soma da P.G..

6.2 Fractais gerados por computadores.

Também chamados de fractais de fuga, um exemplo é o conjunto de Mandelbrot, que matematicamente, é o conjunto dos parâmetros ***c*** para os quais a "órbita" do ponto 0 por ***c***, isto é, o conjunto das iteradas $\{f_c(0), f_c \circ f_c(0), \cdots\}$ é limitado, onde $\boldsymbol{f_c}$ é a função: $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; Z_{n+1} \longmapsto Z_n^2 + c$, onde $\boldsymbol{Z_0=0}$ ***e*** $\boldsymbol{c = a+bi}$.

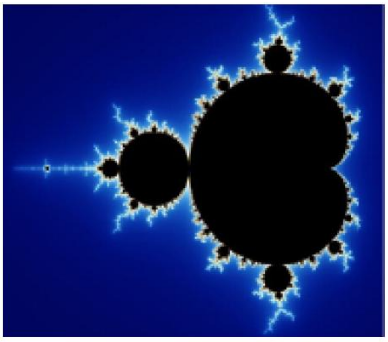

FIGURA 9. Conjunto de Mandelbrot

FIGURA 10. Fractais gerados por computador

6.3 Fractais aleatórios.

São também chamados de fractais naturais, quando o todo é estaticamente semelhante a uma ampliação de uma parte dizemos que o fractal é aleatório.

FIGURA 11. Fractais na natureza

FIGURA 12. Fractais na natureza

7. Aplicações dos Fractais

Recentemente há algumas indústrias ou ramos do conhecimento tais como física, biologia, geologia, astrofísica, entre outras que começaram a se interessar pelos fractais. A seguir mencionamos algumas dessas aplicações.

Processamento de sinas

No trabalho de Gonschorowski (2007) ([8]) é proposto métodos de processamento de sinais e reconhecimento de padrões dos sinais de respostas de sensores de gás, utilizando técnicas e modelos da geometria fractal. Os sinais de resposta de dois tipos de sensores foram estudados. O primeiro foi um dispositivo de óxido de estanho e o segundo foi um dispositivo Metal-Óxido-Semicondutor (MOS). Para o dispositivo de óxido de estanho a técnica na análise dos sinais foi feitoa pólo método do movimento Browniano fracionário e para o dispositivo MOS foram utilizadas as técnicas de compressão fractal de imagenss e determinação da dimensão fractal multiescala.

Medicina

A dimensão fractal é utilizada na medicina para diagnosticar várias patologias, dentre elas o diagnóstico d cancro como podemos ver no trabalho de Sedivy et AL (1999) ([9]), onde ele utiliza a geometria fractal como ferramenta para caracterizar as formas irregulares e figura complexas dos tecidos do corpo humano.

Física dos materiais

Na física dos materiais, o crescimento de estruturas sejam elas cristais ou a penetração de um fluído em outro material, assumem com freqüência, estruturas ramificadas com a propriedade de auto-similaridade. A rocha na qual o petróleo reside apresenta estrutura porosa com propriedades fractais. Outra área de pesquisa é difração de ondas por superfícies fractais, o que permite, num processo inverso, que se adquira informações sobre a estrutura da superfície.

Geologia

Fenômenos geológicos possuem a simetria de escala, exemplos disso são as distribuições de freqüência dos tamanhos de fragmentos de rochas, falhas geológicas, terremotos, erupções vulcânicas e depósitos minerais de petróleo. Os fractais também se mostram úteis no estudo dos meandros dos rios e dos contornos das formações geológicas.

Astrofísica e cosmologia

Em astrofísica e cosmologia, um problema importante é a distribuição de galáxias no universo.

Militar

O interesse militar com respeito aos fractais é o reconhecimento de imagens, que parte da idéia de que s objetos artificiais são construídos em geral a partir de formas regulares, enquanto que os objetos e paisagens naturais têm, uma construção irregular. Com isso, pode-se através de fotografias aéreas pouco claras, identificar domínios fractais que poderiam discernir entre objetos naturais e objetos artificiais camuflados.

Fibras ópticas fractais

O empacotamento apropriado de fibras ópticas produz guias de ondas com muito baixa distorção. Lee Cook da Galileo Eletro-Optics Corp. mostrou, através do uso de pavimentações recursivas, que os melhores empacotamentos de fibras ópticas são aqueles que tem bordas fractais. Isso levou ao desenho de são aqueles que tem bordas fractais. Isso levou ao desenho de feixes de fibras ópticas fractais. Essa tecnologia inovadora foi adquirida pela Incom em 1994 ([10]).

Referências

[1] MESQUITA, A. e MOTA, M. G., Fractais - A linguagem do caos. In. Anais do Clube Militar Naval 1991.

[2] RICIERI, A. P., Fractais e Caos: A matemática de hoje. São Paulo: Prandiano, 1990.

[3] GLEICK, J. Caos: a criação de uma nova ciência. Tradução de Waltensir Dutra. Rio de Janeiro: Campus, 1991.

[4] FALCONER, K.,Fractal Geometry: mathematical foundations and applications. John Wiley and Sons. Chichester. 1990.

[5] PEREIRA, A. B.,Universidade Estadual Vale do Acarajú. Maio. 2007.

[6] FUZZO, R. A., Fractais: algumas características e propriedades. Disponível em: http://www.fecilcam.br/nupem/anais_iv_epct/PDF/ciencias exatas/10 FUZZO REZENDE SANTOS.pdf. Acesso em 14 de abril de 2010.

[7] WIKIPÉDIA. Wikipédia Enciclopédia Livre, Curva de Koch. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Curva de Koch. Acesso em 15 de abril de2010.

[8] GONSCHOROWSKI, J. dos S.,Processamento de sinais e reconhecimento de padrões de resposta de sensores de gases através da geometria fractal. Universidade de São Paulo. São Paulo 2007.

[9] R., SEDIVY et al, Fractal Analysis: An Objective Method for Identifying Atypical Nuclei in Dysplastic Lesions of the Cervix Uteri. Gynecologic Oncology. 75 (1999), 78 - 83.

[10] PRISMA Á LUZ DA FÍSICA, Fractais e a geometria da natureza. Disponível em: http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico9.php. Acesso em 17 de abril de 2010.

[11] OBSERVATÓRIO NACIONAL, A geometria dos espaços curvos ou geometria não-euclidiana. Disponível em: http://www.on.br/site_edu_dist_2006/pdf/modulo3/a geometria dos espaços curvos.pdf. Acesso em 17 de abril de 2010.