Revista Fafibe On Line — n.3 — ago. 2007 — ISSN 1808-6993
www.fafibe.br/revistaonline — Faculdades Integradas Fafibe — Bebedouro – SP

Sobre o teorema de classificação das cônicas pela análise dos invariantes

(About the conics classification theorem for the analysis of the invariants)

Marco Donisete de Campos[1]; Gutemberg Duques dos Santos[2]

[1]Universidade Federal de Mato Grosso – Sinop – MT
mcampos@ufmt.br

[2]Instituto Universitário do Araguaia – UniAraguaia– Pontal do Araguaia – MT
gutduques@hotmail.com

Abstract. *In this work, the conics classification theorem for the analysis of the invariants, proposed by OLIVA (1973), is demonstrated in details intermediated by illustrative examples of each case.*

Keywords. *conics; classification; invariants.*

Resumo. *Neste trabalho, o teorema de classificação das cônicas pela da análise dos coeficientes, proposto por OLIVA (1973), é demonstrado em detalhes, intermediado por exemplos ilustrativos.*

Palavras-chave. *cônicas; classificação, invariantes.*

1. Estudo Geral das Cônicas

1.1 Introdução

A resposta à maioria dos problemas matemáticos depende da solução de equações do tipo f(X) = 0. Dentro dos problemas de classificação local de funções diferenciáveis, uma classe interessante e importante é a das cônicas, cujo conjunto de zeros determina a classe de equivalência por rotação e translação. Um fato não comum!

Seja $(O, \vec{i}, \vec{j})$ um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no R^2. A equação algébrica do segundo grau

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0 \tag{1}$$

com $a_{ij} \in$ R, determina o conjunto de pontos do plano chamado *cônica*, ao qual associamos a matriz simétrica $M_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$. Agora, ao tomarmos um novo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $(O', \vec{e}, \vec{f})$, de mesma orientação que o primeiro e aplicarmos à equação (1) o movimento de rotação e translação simultaneamente, isto é, $\begin{cases} x_1 = a_1 + \cos\theta\, y_1 - sen\theta\, y_2 \\ x_2 = a_2 + sen\theta\, y_1 + \cos\theta\, y_2 \end{cases}$, sendo $-\pi < \theta \le \pi$, (x_1,x_2), (y_1,y_2) as coordenadas de um ponto genérico X nos sistemas $(O, \vec{i}, \vec{j})$ e $(O', \vec{e}, \vec{f})$, respectivamente, (a_1,a_2) as coordenadas da nova origem em relação ao sistema $(O, \vec{i}, \vec{j})$, a cônica será representada por uma nova equação do segundo grau:

$$f(y_1, y_2) = a'_{11}y_1^2 + 2a'_{12}y_1y_2 + a'_{22}y_2^2 + 2a'_{13}y_1 + 2a'_{23}y_2 + a'_{33} = 0 \quad (2).$$

À equação (2) associamos uma nova matriz $M'_3 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}$, que, em geral, é diferente de M_3.

Os elementos $A_1 = a_{11} + a_{12}$, $A_2 = a_{11}.a_{22} - a_{12}^2$ e $A_3 = \det M_3$ chamados *invariantes ortogonais da cônica*, são assim denominados por serem invariantes por rotação e translação, isto é, $A_1 = a_{11} + a_{12} = a'_{11} + a'_{12}$, $A_2 = a_{11}.a_{22} - a_{12}^2 = a'_{11}.a'_{22} - a'^2_{12}$ e $A_3 = \det M_3 = \det M'_3$.

1.2 Centros de uma Cônica

Um ponto $C = (c_1, c_2)$ do plano é chamado *centro da cônica k* se, após a translação de eixos o sistema $(C, \vec{i}, \vec{j})$, a nova equação não contiver os termos lineares. Temos que se (c_1, c_2) são as coordenadas do ponto procurado, as equações de translação no plano, dadas por $\begin{cases} x_1 = y_1 + c_1 \\ x_2 = y_2 + c_2 \end{cases}$, quando substituídas em (1), fornecem

$$a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 + (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13})2y_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23})2y_2 + f(c_1, c_2) = 0 \quad (3).$$

Assim, existirá o centro C se, e somente se, o sistema $\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13} = 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23} = 0 \end{cases}$, tiver solução.

Se $A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ existe um único centro $C = (c_1, c_2)$. Agora, se $A_2 = 0$ e as matrizes $M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $\overline{M}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ têm características, respectivamente, 1 e 2, então a cônica *k* não possui centro. Este fato nos motiva ao seguinte resultado:

Proposição: A cônica *k* não possui centro se, e somente se, $A_2 = 0$ e $A_3 \neq 0$.

Prova: Se não existe centro $A_2 = 0$ e a matriz $\overline{M}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ tem característica 2. Resta mostrar que $A_3 \neq 0$. Se, pelo contrário, considerarmos $A_3 = \det M_3 = 0$, a terceira coluna de M_3 será combinação linear das duas primeiras, i. é., $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}$ e, em particular, $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Como $A_2 = 0$, então $\overline{M}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ tem característica 1, o que é absurdo. Reciprocamente, se $A_2 = 0$ e $A_3 \neq 0$, a matriz $\overline{M}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ tem característica 2 e $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ tem característica 1.

Portanto, a cônica k não possui centro se, e somente se, $A_2 = 0$ e $A_3 \neq 0$.

Teorema (Classificação das cônicas pela análise dos invariantes): Seja *k* uma cônica em relação ao sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Então, existe um novo sistema de coordenadas cartesianas segundo o qual a cônica k ou tem equação da forma $(a_{11}+a_{22})x^2+2\sqrt{\dfrac{-A_3}{a_{11}+a_{22}}}\,y=0$, caso este em que $A_2=0$ e $A_3\neq 0$ (parábola sem centro), ou tem equação $\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+f(c_1,c_2)=0$, caso este em que a cônica tem centro λ_1 e λ_2 não nulos simultaneamente e λ_1 e λ_2 são as raízes da equação de segundo grau $\det A=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}=0$.

A origem do novo sistema é um dos centros (que, no caso $A_2\neq 0$, é único) cujas coordenadas em relação ao sistema original são (c_1,c_2).

Prova:

Se a cônica k possui centro, aplicando o movimento de translação à equação (1) obtemos:

$$a_{11}y_1^2+2a_{12}y_1y_2+a_{22}y_2^2+f(c_1,c_2)=0 \qquad (4)$$

A fim de simplificarmos ainda mais a equação (4), aplicamos um movimento de rotação dos eixos, isto é,

$$\begin{cases} y_1=\cos\theta\, z_1-sen\theta\, z_2 \\ y_2=sen\theta\, z_1-\cos\theta\, z_2 \end{cases}, \quad -\pi<\theta\leq\pi \qquad (5)$$

Substituindo (5) em (4) temos, como coeficiente do termo misto, a seguinte expressão $-2a_{11}sen\,\theta\cos\theta+2a_{12}(\cos^2\theta-sen^2\theta)+2a_{22}\cos\theta sen\,\theta=(a_{22}-a_{11})sen\,2\theta+2a_{12}\cos 2\theta$, com $a_{12}\neq 0$.

Assim, se $a_{11}=a_{22}$, basta que $\cos 2\theta=0$ e, dessa forma, $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ou $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Logo, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Por outro lado, se $a_{11}\neq a_{22}$, procuremos θ, $-\pi<\theta\leq\pi$, tal que $(a_{22}-a_{11})sen2\theta+2a_{12}\cos 2\theta=0$. Então, $\dfrac{sen2\theta}{\cos 2\theta}=-\dfrac{a_{12}}{a_{22}-a_{11}}$ e, assim, $tg2\theta=-\dfrac{a_{12}}{a_{22}-a_{11}}$.

Assim, qualquer que seja θ que satisfaça as condições acima, serve aos novos propósitos.

Eliminando o termo misto, temos uma equação do tipo $Az_1^2+Bz_2^2+f(c_1,c_2)=0$. Daí, $M'=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & f(c_1,c_2) \end{pmatrix}$, sendo $A_1=A+B$ e $A_2=A.B$. Notemos que A e B são raízes da seguinte equação do segundo grau $\lambda^2-(A+B)\lambda+(A.B)=0$, ou, equivalente, raízes da equação $\det A=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}=0$

Finalmente, a equação da cônica se reduz a $\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+f(c_1,c_2)=0$.

No caso em que $A_2=0$ e $A_3\neq 0$ temos, pela proposição, que a cônica k não possui centro. A fim de eliminarmos o termo misto da equação da cônica k, aplicamos um movimento de rotação definido na Eq. (5) e obtemos uma equação do tipo $b_{11}y_1^2+b_{22}y_2^2+2b_{13}y_1+2b_{23}y_2+a_{33}=0$ à qual associamos a matriz $M_3'=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$, sendo $A_1=b_{11}+b_{22}$, $A_2=b_{11}.b_{22}$ e $A_3=\det M_3'$.

Como, por hipótese, $A_2=0$ então $b_{11}b_{22}=0$ e, daí, $b_{11}=0$ e $b_{22}\neq 0$ ou $b_{22}=0$ e $b_{11}\neq 0$.

i) Se $b_{11}=0$ e $b_{22}\neq 0$ então $A_3=-b_{22}(b_{13})^2\neq 0$ e $b_{13}\neq 0$. Obtemos

$$b_{22}y_2^2 + 2b_{13}y_1 + 2b_{23}y_2 + a_{33} = 0 \Rightarrow b_{22}\left(y_2^2 + \frac{2b_{23}y_2}{b_{22}} + \left(\frac{b_{23}}{b_{22}}\right)^2\right) + 2b_{13}\left(y_1 + \frac{1}{2b_{13}}\left(a_{33} - \frac{b_{23}^2}{b_{22}}\right)\right) = 0.$$

Efetuando a seguinte translação de eixos, $z_1 = y_1 + \frac{1}{2b_{13}}\left(a_{33} - \frac{b_{23}^2}{b_{22}}\right)$ e $z_2 = y_2 + \frac{b_{23}}{b_{22}}$ chegamos à equação $b_{22}z_2^2 + 2b_{13}z_1 = 0$, que representa uma *parábola*.

ii) Se $b_{22} = 0$ e $b_{11} \neq 0$ então $A_3 = -b_{11}b_{23}^2 \neq 0 \Rightarrow b_{23} \neq 0$. Obtemos a equação

$$b_{11}y_1^2 + 2b_{13}y_1 + 2b_{23}y_2 + a_{33} = 0 \Rightarrow b_{11}\left(y_1^2 + \frac{2b_{13}y_1}{b_{11}} + \left(\frac{b_{23}}{b_{11}}\right)^2\right) + 2b_{23}\left(y_1 + \frac{1}{2b_{23}}\left(a_{33} - \frac{b_{23}^2}{b_{11}}\right)\right) = 0.$$

Efetuando a translação de eixos $z_1 = y_2 + \frac{1}{2b_{23}}\left(a_{33} - \frac{b_{23}^2}{b_{11}}\right)$ e $z_2 = y_1 + \frac{b_{13}}{b_{11}}$, chegamos à equação $b_{11}z_2^2 + 2b_{23}z_1 = 0$ que também representa uma *parábola*.

Assim, quando $A_2 = 0$ e $A_3 \neq 0$, a cônica é uma parábola com equação $Ax^2 + 2By = 0$, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$. A matriz $M_3^{'}$ torna-se $\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}$. Logo, $A_1 = A = a_{11} + a_{22}$ e $A_3 = -AB^2 = -A_1B^2 = -(a_{11} + a_{22}).B^2$.

Portanto, se $(a_{11} + a_{22})x^2 + 2\sqrt{\frac{-A_3}{a_{11} + a_{22}}}y = 0$ obtemos $B = \sqrt{-\frac{A_3}{a_{11} + a_{12}}}$.

2. Classificação das Cônicas pelos Invariantes

<u>1° Caso:</u> A_2=0

i) Se $A_3 \neq 0$, pela proposição, trata-se de uma *parábola*.

Aplicação: Seja a cônica representada pela equação $x^2 + y^2 - 2xy - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$. A matriz M_3 é $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4\sqrt{2} \\ -1 & 1 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ e, assim, $A_1 = 2$, $A_2 = 0$ e $A_3 = -128$. Como $A_2 = 0$ e $A_3 \neq 0$, pela proposição, a equação representa uma *parábola*.

ii) Se $A_3 = 0$, existe uma reta de centros e as matrizes $M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $\overline{M}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ têm característica 1. A equação reduzida é $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + f(c_1, c_2) = 0$ à qual associamos a matriz $\overline{M}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & f(c_1, c_2) \end{pmatrix}$ e obtemos, $A_1 = \lambda_1 + \lambda_2$ e $A_2 = \lambda_1 . \lambda_2$. Como $A_2 = 0$, temos $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ ou $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$.

Considerando $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ e substituindo na equação reduzida temos $\lambda_2 z_2^2 + f(c_1, c_2) = 0$. Assim, a natureza da cônica dependerá de $A_1 . f(c_1, c_2)$.

Com efeito, se $A_1 . f(c_1,c_2)>0$ então a equação reduzida é da forma $\lambda_2 z_2^2 = -f(c_1,c_2)$, tratando-se, portanto, do *conjunto vazio*. Se denotarmos A_{11} e A_{22} os respectivos cofatores dos elementos a_{11} e a_{22} da matriz $\overline{M}_3$, temos que $A_{11} = \lambda_2 . f(c_1,c_2)$ e $A_{22} = \lambda_1 . f(c_1,c_2)$. No caso particular em que $A_2 = 0$ e $A_3 = 0$ temos $A_1 . f(c_1,c_2) = (\lambda_1 + \lambda_2). f(c_1,c_2) = A_{11} + A_{22}$.

Aplicação: Seja a cônica representada pela equação $8x^2 + 8xy + 2y^2 + 2 = 0$. A matriz M_3 associada a à equação da cônica é $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Como $A_2 = A_3 = 0$ e $A_{11}A_{22} > 0$ temos que a equação dada representa o *conjunto vazio*.

Se $A_1 . f(c_1,c_2)<0$ então a equação reduzida é da forma $\lambda_2 z_2^2 = f(c_1,c_2)$, tratando-se portanto, de *duas retas paralelas*.

Aplicação: Seja a cônica representada pela equação $x^2 + 4xy + 4y^2 - 1 = 0$. A matriz M_3 é $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e, assim, $A_1 = 5$, $A_2 = 0$ e $A_3 = 0$. Como $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ e $A_{11} + A_{22} < 0$ concluímos que a equação representa *duas retas paralelas*.

Finalmente se $A_1 . f(c_1,c_2) = 0$, a equação reduzida é da forma $\lambda_2 z_2^2 = 0$, tratando-se portanto, de uma *reta*.

Aplicação: Seja a cônica representada pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. A matriz M_3 é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e, assim, $A_1 = 2$, $A_2 = 0$ e $A_3 = 0$. Como $A_2 = A_3 = 0$ e $A_{11} + A_{22} = 0$ temos que a equação representa *uma reta*.

No caso em que $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$ teremos resultados análogos.

<u>2° Caso:</u> $\mathbf{A_2 \neq 0}$

Pelo Teorema de Cramer, se $A_2 \neq 0$ a cônica possui um único centro $C = (c_1, c_2)$. A equação reduzida é da forma $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + f(c_1,c_2) = 0$ a qual associamos a matriz $\overline{M}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & f(c_1,c_2) \end{pmatrix}$. Daí,

i) $A_3 = 0$ se, e somente se, $f(c_1,c_2) = 0$.

Se $A_2 > 0$ então λ_1 *e* λ_2 têm o mesmo sinal. Assim, a equação $\lambda_1 z_1^2 = -\lambda_2 z_2^2$ representa um *ponto*.

Aplicação: Seja a cônica representada pela equação $x^2 + 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$. A matriz M_3 é $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ e, assim, $A_1 = 3$, $A_2 = 1$ e $A_3 = 0$. Como $A_2 \neq 0$, $A_3 = 0$, $A_2 > 0$ temos que a equação representa *um ponto*.

Se $A_2 < 0$ então $\lambda_1 \, e \, \lambda_2$ têm sinais opostos. Assim, a equação $\lambda_1 z_1^2 = \lambda_2 z_2^2$ representa *duas retas concorrentes*.

Aplicação: Seja a cônica representada pela equação $x^2 - 4xy + y^2 = 0$. A matriz M_3 é $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e, assim, $A_1 = 2$, $A_2 = -3$ e $A_3 = 0$. Como $A_2 \neq 0,\ A_3 = 0,\ A_2 < 0$ temos que a equação representa *duas retas concorrentes*.

ii) $A_3 \neq 0 \Leftrightarrow f(c_1, c_2) \neq 0$

Se $A_2 > 0$ então $\lambda_1 \, e \, \lambda_2$ têm o mesmo sinal e, conseqüentemente, $A_1 \neq 0$. A equação reduzida, nesse caso, é, $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = -f(c_1, c_2)$. Daí, se $A_1 \, A_3 > 0$ então $\lambda_1^2 \, \lambda_2 \, f(c_1, c_2) + \lambda_2^2 \, \lambda_1 \, f(c_1, c_2) > 0$. Assim, se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ então $f(c_1, c_2) > 0$ e, por outro lado, se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$ então $f(c_1, c_2) < 0$. Portanto, em qualquer um dos casos teremos $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = -f(c_1, c_2)$ que representa o *conjunto vazio*.

Aplicação: Seja a cônica representada pela equação $5x^2 + 2y^2 + 2xy + 2 = 0$. A matriz M_3 é $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e, assim, $A_1 = 7$, $A_2 = 9$ e $A_3 = 18$. Como $A_2 \neq 0,\ A_3 \neq 0,\ A_2 > 0$ e $A_1 A_3 > 0$ temos que a equação representa *o conjunto vazio*

Por outro lado, se $A_1 \, A_3 < 0$ então $\lambda_1^2 \, \lambda_2 \, f(c_1, c_2) + \lambda_2^2 \, \lambda_1 \, f(c_1, c_2) < 0$. Daí, se $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ então $f(c_1, c_2) < 0$ e, analogamente, se $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ então $f(c_1, c_2) > 0$. Em qualquer um dos casos teremos $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = f(c_1, c_2)$ que representa uma *elipse*.

Aplicação: Seja a cônica representada pela equação $x^2 + 3y^2 + xy - 2x + 4y - 5 = 0$. A matriz M_3 é $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ e, assim, $A_1 = 4$, $A_2 = \frac{11}{4}$ e $A_3 = -\frac{91}{4}$. Como $A_2 \neq 0,\ A_3 \neq 0,\ A_2 > 0$ e, $A_1 A_3 < 0$ temos que a equação representa *uma elipse*.

Se $A_2 < 0$, então $\lambda_1 \, e \, \lambda_2$ têm sinais opostos. A equação reduzida, nesse caso, é, $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = f(c_1, c_2)$, que representa uma *hipérbole*.

Aplicação: Seja a cônica representada pela equação $8x^2 + 6xy - 12x - 26y + 11 = 0$. A matriz M_3 é $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}$ e, assim, $A_1 = 8$, $A_2 = -9$ e $A_3 = 81$. Como $A_2 \neq 0$, $A_3 \neq 0$ e $A_2 < 0$ temos que a equação representa *uma hipérbole*.

3. Referência

OLIVA, W.M. *Vetores e Geometria*. São Paulo: Edgard Blücher, 1973.