Papel de Pontos: Quais ou Quantos I
Segmentos e Triângulos em Rede 3x3

Iara Suzana Tiggeman[1,3]; Karine Bobadilha[2,3]; Maria Christina Bitencourt de Marques[2,3]; Sirlei Tauber de Almeida[2,3]; Ruy Madsen Barbosa[2,3,4]

[1]IMESC - Catanduva e FEV- Votuporanga – SP

[2]IMESC – Catanduva – SP

[3]G.G.E.P. – Grupo Geoplano de Estudo e Pesquisa

[4]ruymadsen @ uol.com.br

Abstract. *Two case-problems identified as listing (enumeration) and counting were studied using a quadrangular grid of 3 x 3 nodes, one of which consisting of straight line segments and the other consisting of triangles. Class activities are presented for the elementary school level, arranged by "how" and "how many". The corresponding mathematics for the medium school level is also presented for both given cases studied. This study begins a series of contributions in the same line of educational practices.*

Key-words: *3x3-nodes grid, solving-problem, activities, straight line segments, triangles, listing, counting.*

Resumo. *O grupo estuda duas situações-problema de listagem (enumeração) e contagem, numa rede quadrangular de 3 x 3 pontos; uma de segmentos de reta e outra de triângulos. Em ambas são fornecidas atividades apropriadas para sala de aula do Ensino Fundamental, separadas nos seus aspectos "quais" e "quantos", iniciando uma série de trabalhos nesta linha de ação educacional. É também dada a matemática subjacente ao nível do Ensino Médio para as duas situações-problema.*

Palavras-chave: *Rede de pontos 3 x 3, situações-problema, atividades, segmentos de reta e triângulos, listagem e contagem.*

1. Introdução

Neste texto o GGEP inicia uma série de trabalhos do tipo "Quais ou quantos?". No quesito "Quais" procura-se fornecer a listagem de soluções para determinadas situações-problema. No segundo, "Quantos", busca-se o estabelecimento de procedimentos ou fórmulas de contagem para estas mesmas situações.

Entretanto, fixamo-nos em situações-problema específicas a regiões de redes de pontos, ou quadrangulares ou triangulares, e eventualmente circulares (ver GGEP-

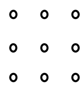
2001-2002), ou a elas transformáveis com novas interpretações de seus elementos constituintes.

Esta opção de pesquisa se apresenta educacionalmente melhor face à possibilidade de inserção de ricas atividades e respectivas explorações.Em geral, tais atividades permitem ou devem colaborar para o desenvolvimento da criatividade do educando, além dos usuais objetivos de fixação da aprendizagem de temas envolvidos.

Ao abrirmos a série focalizamos duas situações-problema; a primeira bem simples, de encaminhamento para a segunda, exigindo um pouco mais atenção e simultaneamente mais interessante analisada considerada do ponto de vista educacional.

Situação:
Dispomos de uma região limitada de rede quadrangular, com 3 x 3 pontos (pinos no geoplano)

Fig. 1



Problema 1: Estudar a construção de segmentos com extremos só em pontos da rede.

Problema 2: Estudar a construção de triângulos com vértices só em pontos da rede.

2. Atividades da Situação – Problema 1

Atividade 1 – Construir todos tipos de segmentos com extremos em pontos da rede de pontos 3 x 3.[1]
Ilustrações:
Fig.2a

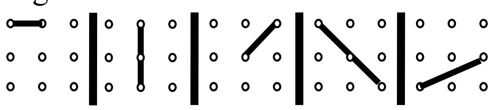
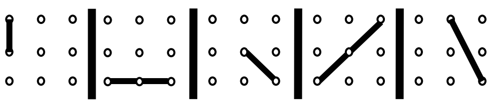


Fig.2b



Comentário:

As nossas ilustrações anteriores apresentam todos tipos de segmentos possíveis numa rede 3 x 3 numa primeira classificação.

Propomos inicialmente assim, com 10 classes; onde, por exemplo, consideramos as primeiras (Fig.2a, 2b) distintas, mas que só diferem por ser os da primeira classe da Fig.2a de segmentos pequenos horizontais. e a primeira da Fig.2b de segmentos pequenos verticais; portanto, podem ser identificadas, constituindo uma só classe.

Analogamente, as segundas poderiam constituir uma só classe. Da mesma maneira podemos reunir as terceiras, as quartas, e as quintas, o que daria um total

[1] Encontramos em SERRAZINA e MATOS (1988), sob a forma "*Quantos segmentos de recta diferentes existem no geoplano 3 x 3?", contudo sem solução ou comentários.*

de apenas cinco classes. Esse modo de apresentar as cinco, com certeza, facilita a aceitação por parte dos alunos, bem como ajudará no aspecto do quesito contagem.

Alguma dificuldade poderá aparecer para entender que a quinta classe (Fig.2a) é constituída de segmentos pouco inclinados em relação à horizontal, alguns ascendentes e outros descendentes, e a quinta (Fig.2b) formada por segmentos bastante inclinados, porém com as mesmas medidas, e ainda igualmente inclinados mas em relação à vertical.

É claro que, podem algumas intervenções do professor serem necessárias para fazer surgirem, no início, exatamente esses dez tipos, ora para identificar ora para complementar.

Nota: Um outro argumento para separar em apenas cinco classes é considerar a medida dos segmentos, aqueles com medidas iguais pertencerão à mesma classe.

Atividade 2: Quantos segmentos podem ser construídos numa rede 3 x 3? .

Resolução para o tipo I:
Temos seis segmentos da primeira classe que são horizontais e seis que são verticais de onde segue que do tipo I temos 6 + 6 = 12 segmentos.
Resolução para o tipo II:
Três são segmentos horizontais e três são verticais, fornecendo o total para o tipo II de 3 + 3 = 6 segmentos.
Resolução para o tipo III:
Encontramos quatro inclinados descendentes e também quatro inclinados ascendentes, de onde o total de 4 + 4 = 8 segmentos do tipo III.
Resolução para o tipo IV:
As diagonais: uma ascendente e uma descendente, fornecem dois segmentos para o tipo IV.
Resolução para o tipo V:
Cada segmento do tipo ocupa um retângulo de 3x2 (ou 2x3) pontos da rede. Em cada um dos retângulos as diagonais são do tipo V.
Desde que temos 4 retângulos, dois horizontais e dois verticais, ao todo temos 4x2=8 segmentos do tipo V.

Resumo: Tipo I → 12, Tipo II → 6, Tipo III → 8, Tipo IV → 2 e Tipo V → 8.
Total de 36 segmentos possíveis em rede 3 x 3.

Comentário:

Na resolução da questão de contagem é preferível, no Ensino Fundamental, empregar o estudo por casos, preparando o educando para questões análogas freqüentes na matemática, e possibilita bom desenvolvimento do raciocínio.

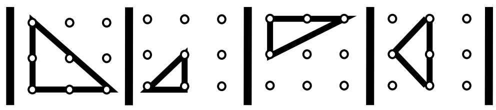
No Ensino Médio, esta é um questão de natureza combinatória, e o professor poderá utilizar simplesmente a fórmula do número de combinações simples
$C_{n.k} = n^{(k)} / k!$ (onde $n^{(k)}$ é potência fatorial decrescente) = $n(n-1)(n-2) \ldots (n - k + 1) / 1.2.3 \ldots k$
Assim, na presente situação-problema temos:

$$C_{9,2} = 9^{(2)} / 2! = 9.8 / 1.2 = 36$$

desde que, temos nove pontos da rede para serem escolhidos para extremos, e que cada vez devemos selecionar dois deles.

3. Atividades da Situação – Problema 2

C.1 - Quais
Atividade 1 – Construir triângulos retângulos com os vértices na rede de pontos.
Ilustrações:
Fig.3



Comentário:

Na figura 3, dada acima, fornecemos todos os tipos de triângulos retângulos. Aquele da primeira ilustração é o mais freqüente no ensino fundamental, desde que o aluno, em geral, tem a tendência de apresentar uma solução que seja a maior possível na rede.

Uma intervenção do professor se fará conveniente indagando se existiriam menores, quando deverão complementar com a segunda e terceira ilustração.

Também, a quarta ilustração é raramente proposta, face ao fato de que a percepção visual do educando dificilmente detecta a existência do ângulo reto inclinado.

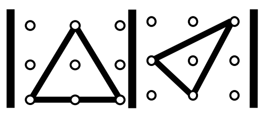
Julgamos conveniente um acompanhamento da listagem no quadro.

Algumas explorações:

- Conceito de triângulo retângulo;
- Denominações conforme lados ou ângulos;
- Quais são triângulos retângulos isósceles ?
- Quais são triângulos retângulos escalenos ?
- Existem triângulos retângulos que possuem um ângulo obtuso ?

Atividade 2 – Construir triângulos isósceles na rede 3 x 3 de pontos, mas que não sejam triângulos retângulos.

Ilustrações:
Fig.4



Comentário:

Em ambas ilustrações, é adequado verificar conjuntamente com os alunos a existência, de dois lados com a mesma medida.

Coincidentemente, nas duas, a verificação é a mesma, os lados congruentes possuem uma extremidade em ponto de canto da rede e o outro extremo em ponto médio de uma lateral. Parece-nos interessante mostrar, principalmente na primeira, que o terceiro lado tem medida diferente, baseando-se na propriedade de que a inclinada é sempre maior que a perpendicular. Em contrário, se este fato não for esclarecido o primeiro triângulo poderia ser eqüilátero.

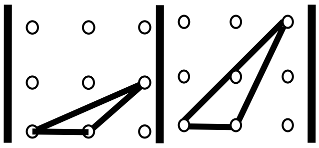
Algumas explorações :

- o conceito de triângulo isósceles;
- o conceito de triângulo acutângulo;
- o conceito de triângulo eqüilátero;
- o propriedade da inclinada e perpendicular.

Atividade 3 – Construir triângulos escalenos que sejam obtusângulos.

Ilustrações:

Fig.5



Algumas explorações:

- ▪ conceito de triângulo escaleno;
- ▪ conceito de triângulo obtusângulo
- ▪ oposição de lados e ângulos.

Nota: Uma alternativa para o educador é solicitar numa atividade inicial a construção de todos tipos de triângulos numa rede de 3 x 3 pontos; e depois, em outras atividades separar por tipos, conforme fizemos.

C.2 – Quantos

Empregaremos novamente o procedimento de separação em casos para as diversas contagens, que em nosso ver usam argumentações interessantes. Deixamos alguns casos a cargo do leitor interessado, dando apenas a solução numérica.

Atividade 4 – Descobrir quantos são os triângulos retângulos isósceles que podem ser construídos numa rede 3 x 3.

Pequenos

Resolução:

a) Em cada quadrícula de 2 x 2 pontos da rede é possível se construir quatro; basta fazer sucessivamente rotações de 90^0;

b) Existem quatro quadrículas de 2 x 2 pontos da rede;

c) Portanto segue a existência de 4 x 4 = 16 triângulos isósceles pequenos.

Grandes

Solução: 4 triângulos.

Médios

Resolução:

a) Cada triângulo ocupa um retângulo de 3 x 2 pontos da rede;

b) Em cada retângulo de 3 x 2 pontos temos dois triângulos médios;

c) Desde que existem dois retângulos horizontais de 3 x 2 pontos e dois retângulos verticais de 2 x 3 pontos, segue que o número total de triângulos médios é dado por 4 x 2 = 8.

Resumo: No total temos 16 + 4 + 8 = 28 triângulos retângulos isósceles.

Atividade 5 - Descobrir quantos triângulos retângulos não isósceles podem ser construídos na rede 3 x 3.

Resolução:

a) Existem dois retângulos 3 x 2 (horizontais) e dois retângulos 2 x 3 (verticais);
b) Desde que em cada retângulo anterior temos 4 triângulos retângulos não isósceles então temos no total 4 x 4 = 16.

Atividade 6 – Descobrir quantos triângulos escalenos obtusângulos podem ser construídos na rede 3 x 3.

Solução: 16 médios + 8 grandes num total de 24 escalenos obtusângulos.

Atividade 7 - Descobrir quantos triângulos isósceles não retângulos, podem ser construídos numa rede de 3 x 3 pontos.

Resolução:

Temos quatro de base ou horizontal ou vertical, e quatro de base inclinada.

Segue que, temos o número total de triângulos isósceles, que não são retângulos, dado por 4 + 4 = 8.

Resumo: No total podem ser construídos 28 + 16 + 24 + 8 = 76 triângulos numa rede 3 x 3, distribuídos em 8 classes.

Nota complementar: No caso, destas situações – problema serem trabalhadas, seria conveniente ao docente explorar a questão "classe" para qual temos o entendimento conceitual:

Os elementos de uma classe devem ser considerados equivalentes, então cada um é representante da classe.

A idéia de classe está relacionada ao conceito de classificação; ação entendida de tal forma que as classes devem ser disjuntas (a intersecção é vazia); assim na classificação usual de triângulos quanto aos lados tem-se as classes: dos escalenos (todos lados com medidas diferentes), dos isósceles (dois lados com medidas iguais e um com medida diferente), e dos eqüiláteros (os três lados com medidas iguais).

É até relativamente comum considerar os isósceles como tendo dois lados congruentes, o que permite ter os eqüiláteros como particulares isósceles, pois eles possuem três lados congruentes e conseqüentemente possuem dois com medidas iguais.

Dependendo da série na qual estão sendo estudadas estas duas situações-problema uma exploração de simples fixação pode ser ilustrada usando operações com frações:

a) 2 / 3 + 1 / 4 = 8 / 12 + 3 / 12 = 11 / 12, onde cada parcela é trocada por uma equivalente que representa a mesma classe;

b) 2 / 3 : 1 / 4 = 8 / 12 : 3 / 12 = 8 / 3 = 2 + 2 / 3, onde fizemos as mesmas substituições, buscando-se trabalhar só com os numeradores: quantas vezes 8 partes iguais (1/12) possuem 3 dessas partes.

4. A Matemática Subjacente ao Nível do Ensino Médio

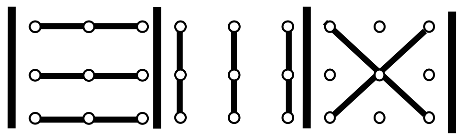
A pergunta "Quantos triângulos são possíveis de se construir numa rede de 3 x 3 pontos?" pode ser tratada no ensino médio com resolução fácil (Branfield, 1970).

Vejamos a resolução:

- Para cada triângulo devemos selecionar 3 pontos para vértices dos 9 pontos da rede, o que se consegue com a fórmula de combinações simples
  $C_{9,3} = 9^{(3)} / 3! = 9.8.7 / 1.2.3$
  $= 84$
- Porém, alguns desses subconjuntos de três pontos não podem constituir vértices de um triângulo; são aqueles alinhados.
  Nessa condição temos oito ternas que precisam ser eliminadas.

Nota:
Três com os pontos em horizontal, três com os pontos em vertical, e no terceiro caso dois com eles em diagonal, de acordo com nossas indicações dadas na fig.6.

Fig.6



- Em conseqüência, o número total de triângulos que podem ser construídos com vértices nos pontos de uma rede 3x3 é igual a
  $84 – 8 = 76$.

4. Considerações Finais

O professor poderá acrescentar atividades de construção de todos triângulos das diversas classes, ou simplesmente substituir, para o Ensino Fundamental, os cálculos de natureza combinatória pela busca exaustiva.

Permitimo-nos lembrar que o estudo de Segmentos e Triângulos em rede 4 x 4, desta série Quais ou quantos está em fase de conclusão.

5. Referências Bibliográficas

BRANFIELD, J. R. – Geoboard
Geometry, The Mathematical Gazette, vol LIV n. 390, 1970. 359-361.
GGEP – Sugestões de atividades
educacionais usando o geoplano, entre muitas outras possíveis, Revista de Educação Matemática, SBEM-SP, Ano 8, n.6-7, 2001/2002, 63 - 68.
SERRAZINA,L. e MATOS,J.M. –
1988, O geoplano na sala de aula (2ed.),APM, Lisboa.